BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

КРИТИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ РАЗНОСТЕННОГО ВЯЗКО-УПРУГОГО КОЛЬЦА

Э.Т.КИЯСБЕЙЛИ

Бакинский Государственный Университет

mexanika.bsuaz@mail.ru

В различных конструкциях в качестве несущих элементов используются тонкостенные кольца, свойства материала которых можно описать уравнением состояния наследственного типа. При этом для ряда важных приложений кольца необходимо представить в виде разностенной оболочки с начальным несовершенством. Последнее имеет тенденцию расти со временем и начиная с некоторого её значения рост прогиба может стать катастрофически большим. Это обстоятельство приводит к необходимости учета геометрической нелинейности. Отметим также, что наличие разностенности можно объяснить, например, неточностью изготовления изделия. Это обстоятельство присуще практически всем эксплуатируемым трубам.

В этой связи целью настоящей статьи является исследование потери устойчивости разностенного линейно-вязкоупругого кольца, находящегося под действием равномерно распределенного внешнего давления заданной интенсивности. Решение основано на вариационном методе смешанного типа в сочетании с методом Релея-Ритца. Такой подход позволяет обойти математические трудности, связанные с учетом нелинейности прогиба и разностенности.

1. Введем в рассмотрение полярные координаты (z,θ) и предположим, что задано разностенное круговое кольцо радиусом R и толщиной $2h(\theta)$. Здесь для описания свойств материала кольца будем использовать уравнение линейной вязкоупругости, которое во многих ситуациях можно представить в виде [1]:

$$\varepsilon^{\Phi} = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t F'(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \tag{1.1}$$

где $F'(t-\tau)$ - разностное ядро ползучести, штрих означает дифференцирование по параметру $(t-\tau)$, E - мгновенный модуль упругости, а σ - азимутальное напряжение. Функцию $F'(t-\tau)$ конкретизируем, задав её в экспоненциальной форме

$$F'(t-\tau) = \frac{A}{E} e^{-\alpha(t-\tau)}. \tag{1.2}$$

Здесь A и α, соответственно, коэффициент и показатель ползучести.

В основе предполагаемой теории сжатых колец далее будем использовать следующие допущения:

а) используется геометрически нелинейная теория, при которой учитывается нелинейность только прогиба w и выполняется неравенство $w/R << 1$;

б) процесс сплющивания происходит в плоскости кольца и для простоты принимается в виде «восьмерки»;

в) в силу тонкостенности напряжение σ меняется по толщине по линейному закону;

г) принимается гипотеза плоских сечений Кирхгофа-Лява.

Принятые предпосылки позволяют значительно упростить соответствующие вычисления. Однако окончательный результат позволяет как качественно так и количественно оценить влияние разностенности. Её будем аппроксимировать формулой

$$h(\theta) = h_0(1 + \mu \sin\theta), \tag{1.3}$$

в которой μ будем называть коэффициентом разностенности и исходя из геометрических соображений $\mu \in [0,1)$.

Рассмотрим теперь устойчивость выбранного кольца под действием равномерно распределенного по внешнему контуру сжимающего давления $q = const$. Вследствие гипотезы г) запишем:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + kz$$

Учитывая допущение а), величину ε_0 и кривизну k определим по формулам нелинейной теории тонких оболочек [2].

$$\varepsilon_0 = \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)^2; \qquad k = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \tag{1.4}$$

Решение поставленной задачи осуществим посредством вариационного метода [3], при использовании которого с учетом (1.3) выражение функционала дается равенством:

$$K = R\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int_{0}^{2\pi}\left\{\dot{\sigma}\,\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2}\left(\frac{\partial\,\dot{w}}{\partial \theta}\right)^2\right\}dz d\theta - R\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int_{0}^{2\pi}\dot{\varepsilon}^{\Phi}\,\dot{\sigma}\,dz\,d\theta + \frac{R}{2}\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\frac{\dot{\sigma}^2}{E}dz\,d\theta. \tag{1.5}$$

Здесь и далее точка над символом означает дифференцирование по физическому времени t. Из (1.2) имеем:

$$F''(t-\tau) = -\alpha\frac{A}{E}e^{-\alpha(t-\tau)}$$

и для величины $\dot{\varepsilon}^{\Phi}$ запишем:

$$\dot{\varepsilon}^{\Phi} = \frac{1}{E}\left\{\dot{\sigma} + A\left[\sigma - \alpha\int_{0}^{t}e^{-\alpha(t-\tau)}\sigma(\tau)d\tau\right]\right\}. \tag{1.6}$$

Итак, с учетом (1.6) функционал (1.5) может быть переписан в форме

$$K = R\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int_0^{2\pi}\left[\dot{\sigma}\,\dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2}\left(\frac{\partial\,\dot{w}}{\partial\theta}\right)^2\right]dz d\theta - \frac{R}{2E}\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int_0^{2\pi}\dot{\sigma}^2\,dz\,d\theta -$$

$$-\frac{RA}{E}\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int_0^{2\pi}\sigma\dot{\sigma}\,dz\,d\theta + \alpha\frac{RA}{E}\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int_0^{2\pi}\dot{\sigma}\left\{\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\sigma(\tau)d\tau\right\}dz\,d\theta. \qquad (1.7)$$

Для получения окончательного вида функционала применим метод Релея-Ритца. В качестве аппроксимирующей функции согласно б) положим

$$w = w_0(t) + w_1(t)\cos 2\theta\,. \qquad (1.8)$$

Дифференцируя по t, имеем:

$$\dot{w} = \dot{w}_0 + \dot{w}_1\cos 2\theta\,. \qquad (1.9)$$

Следуя допущению в), примем

$$\sigma = -\frac{qR}{2h(\theta)} + c\frac{z}{h(\theta)}\cos 2\theta \qquad \text{или} \qquad \dot{\sigma} = \dot{c}\frac{z}{h(\theta)}\cos 2\theta\,, \qquad (1.10)$$

где $\dot{w}_0, \dot{w}_1$ и $\dot{c}$ - независимые варьируемые параметры.

2. Подстановка выражений (1.9) и (1.10) в (1.7), после интегрирования по z и θ, приводит к следующей формуле для функционала

$$K = \frac{4\pi h_0^2}{3R}\dot{c}\,\dot{w}_1\left(1+0{,}5\varepsilon^2\right) - 2\pi q w_1^2 - \pi q\dot{w}_0^2 - \frac{\pi R\dot{c}^2 h_0}{3E} -$$

$$-\frac{2\pi RAh_0}{3E}c\dot{c} + \alpha\frac{2\pi RAh_0}{3E}\dot{c}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}c(\tau)d\tau\,. \qquad (2.1)$$

Условие стационарности (2.1)

$$\delta K = 0\,,$$

соответствующее равенствам

$$\frac{\partial K}{\partial\dot{w}_1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial K}{\partial\dot{c}} = 0\,,$$

позволяет записать

$$\frac{4h_0^2}{3R}\dot{c}\left(1+0{,}5\mu^2\right) - 4q\dot{w}_1 = 0\,, \qquad (2.2)$$

$$\frac{4h_0^2}{3R}\dot{w}\left(1+0{,}5\mu^2\right) - \frac{2Rh_0}{3E}\dot{c} - \frac{2RAh_0}{3E}c + \alpha\frac{2RAh_0}{3E}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}c(\tau)d\tau = 0\,.$$

Итак, нашим следующим этапом является вычисление неизвестных функциональных аргументов. Для этого, вначале, систему уравнений (2.2) дополним начальным условием, которое можно записать следующим образом:

$$c(0)=0\,. \tag{2.3}$$

Физически это равенство отражает факт отсутствия момента при $t=0$. Проинтегрировав первое уравнение системы (2.2) при начальном условии (2.3) легко получить:

$$c=\frac{3Rq}{h_0^2\left(1+0{,}5\mu^2\right)}w_1\,. \tag{2.4}$$

Произведя теперь некоторые простые преобразования, запишем уравнение, которое описывает зависимость w_1 от t, q и физико-механических и геометрических параметров

$$\begin{gathered}\dot{w}_1\left\{\frac{4h_0^2}{3R}-\frac{2R^2q}{Eh_0\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2}\right\}-\frac{2R^2Aq}{Eh_0\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2}w_1+\\+\alpha\frac{2R^2Aq}{Eh_0\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}w_1(\tau)d\tau=0\end{gathered} \tag{2.5}$$

К этому уравнению присовокупим второе начальное условие

$$w_1(0)=w_1^0\,,$$

в котором w_1^0 - значение прогиба, возникающее немедленно после приложения нагрузки q.

Очевидно, что рассмотрение вопроса устойчивости при вязко-упругости имеет смысл только тогда, когда действующая нагрузка меньше критической. Так как мгновенная деформация линейно-упругая, то для вычисления величины w_1^0 и критической силы естественно применить вариационный метод [4], задавшись тем же предположительным распределением напряжения и прогиба, что и при анализе вязко-упругости, т.е. представив σ и w формулами (1.8) и (1.10). Оставляя в основном прежние обозначения, соответствующий функционал запишем следующим образом:

$$K=R\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int_0^{2\pi}\left[\dot{\sigma}\,\dot{\varepsilon}+\frac{\sigma}{2R^2}\left(\frac{\partial\, w}{\partial\theta}\right)^2\right]dzd\theta-\frac{R}{2E}\int_{-h(\theta)}^{h(\theta)}\int_0^{2\pi}\dot{\sigma}^2\,dz\,d\theta+R\int_0^{2\pi}\dot{w}d\theta\,. \tag{2.6}$$

Однако, здесь под точкой следует понимать дифференцирование по q. Вычислив этот функционал и варьируя его по $\dot{w}_0, \dot{w}_1$ и $\dot{c}$, после соответствующих выкладок приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно $\dot{w}_1$

$$\dot{w}_1 = \frac{2R^2 q}{Eh_0\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2}\cdot\left\{\frac{4h_0^2}{3R} - \frac{2R^2 q}{Eh_0\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2}\right\}^{-1} w_1 . \qquad (2.7)$$

Отсюда, приравняв нулю знаменатель, получим выражение для $q_{кр}$. Оно имеет вид:

$$q_{кр} = \frac{2}{3}\frac{h_0^3}{R^3} E\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2 . \qquad (2.8)$$

Далее, разделяя переменные в уравнении (2.7), учитывая задаваемое начальное несовершенство кольца $w_1^{\vee}$ и проведя некоторые преобразования, выражение для мгновенного прогиба запишем в виде:

$$w_1^0 = w_1^{\vee}\frac{1}{1-\dfrac{3}{2}\dfrac{q}{E}\dfrac{R^3}{h_0^3}(1+0{,}5\mu^2)^{-2}} . \qquad (2.9)$$

Перейдем к безразмерным величинам, позволяющим сократить последующие записи:

$$y = \frac{w_1}{h_0}; \qquad \omega = \frac{q}{q_{кр}^0} .$$

Здесь

$$q_{кр}^0 = \frac{2}{3}\frac{h_0^3}{R^3}E$$

соответствует величине критической силы при отсутствии разностенности ($\mu = 0$). Тогда уравнение (2.5) и начальное условие (2.9) перепишем следующим образом:

$$\dot{y} = \frac{Aw\left\{y - \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}y(\tau)d\tau\right\}}{\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2 - \omega}, \qquad (2.10)$$

$$y_0 = y^{\vee}\frac{1}{1-\omega\left(1+0{,}5\mu^2\right)^{-2}}, \qquad (2.11)$$

где $y^{\vee} = w_1^{\vee}/h$.

Отметим, что исходя из формулы (2.11) достаточно выполнение условия $\omega<1$.

3. Учитывая формулу дифференцирования под знаком интеграла, имеем равенство

$$\left\{\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}y(\tau)d\tau\right\}^{\bullet} = y - \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}y(\tau)d\tau ,$$

которое сводит уравнение (2.10) к виду:

$$\left\{ y(t) - \frac{A\omega}{\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2 - \omega} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau \right\}^{\bullet} = 0 .$$

Проинтегрировав выражение в фигурных скобках, находим:

$$y(t) - \frac{A\omega}{\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2 - \omega} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau = C . \qquad (3.1)$$

Постоянную интегрирования C определим из условия (2.11). Опуская элементарные выкладки аналогично [2] исходное уравнение окончательно приведем к виду:

$$y(t) - \beta \int_0^t e^{-(\lambda+\beta)(t-\tau)} y(\tau) d\tau = y_0 . \qquad (3.2)$$

Здесь дополнительно введены следующие обозначения:

$$\beta(\mu) = \frac{\omega}{\left(1+0{,}5\mu^2\right)^2 - \omega} A ; \qquad -\lambda(\mu) = \beta - \alpha .$$

Теперь, можно сразу выписать решение интегрального уравнения (3.2) [5]. Вычислив интеграл в (3.2), получим:

$$y(t) = y_0 \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\} . \qquad (3.3)$$

Подробный анализ формулы (3.3) в зависимости от знака λ приведен в [2].

4. Решение (3.3) в принципе применительно для любых значений t. Однако очень большие прогибы в кольцах, являющихся элементами конструкций, недопустимы сами по себе. Поэтому весьма разумно ограничить время эксплуатации кольца условием достижения прогибом некоего значения, фиксированного из тех или иных физически обоснованных соображений, и тем самым определить критическое время устойчивости $t_{кр}$. Примем $\tilde{y} = 1$, что соответствует безразмерному прогибу, равному половине толщины.

Тогда

$$1 = y_0 \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right) e^{-\lambda t_{кр}} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\} ,$$

откуда находим

$$t_{кр} = -\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\lambda - \alpha y_0}{\lambda y_0 \left(1 - \dfrac{\alpha}{\lambda}\right)} \right| . \qquad (4.1)$$

Приведем результаты вычислений, соответствующие разным значениям коэффициента разностенности. Примем $\alpha = 0{,}005$; $A = 0{,}8$; $y^{\vee} = 10^{-1}$; $\omega = 0{,}3$.

В таблице приведены зависимости начального прогиба и критического времени в зависимости от μ.

Таблица

μ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y_0	0,143	0,142	0,141	0,138	0,135	0,131	0,128	0,124	0,121	0,118
t_{kp}	5,72	5,82	6,11	6,60	7,31	8,27	9,50	11,04	12,93	15,22

Здесь важно отметить, что при расчетах параметры выбирались таким образом, чтобы выполнялось условие $\lambda < 0$ при любых $\mu \in [0,1)$. При этом значение λ и A заимствованы из [6].

Таким образом, численный эксперимент позволяет сделать следующий вывод:

величина критического времени весьма заметно зависит от коэффициента разностенности, а именно её значение с увеличением μ значительно увеличивается, в то время как величина мгновенного прогиба y_0 уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугаков Н.Н. Ползучесть полимерных материалов. М.: 1973, 287 с.
2. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. Критическое время длинной многослойной вязкоупругой оболочки. // Механика композитных материалов. 2007, т.43, №5, с. 617-628.
3. Амензаде Р.Ю., Ахундов М.Б. Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязко-упругих твердых тел. // Докл. РАН. 2006, т.410, №1, с. 45-48.
4. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева А.Ф. Выпучивание длинной цилиндрической оболочки из нелинейно-упругого материала. // Механика оболочек и пластин. Нижний Новгород: 2002, с. 87-93.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: 1977, 383 с.
6. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976, 277 с.

MUXTƏLİF DİVARLI ÖZLÜ-ELASTİK HALQANIN BÖHRAN ZAMANI

E.T.KİYASBƏYLİ

XÜLASƏ

İşdə verilmiş intensivlikli bərabər paylanmış xarici təzyiqin təsiri altında olan müxtəlif divarlı xətti özlü-elastik halqanın dayanıqlığının itirilməsi tətqiq olunmuşdur. Məsələnin həlli Reley-Rits üsulu ilə birlikdə qarışıq tip variasiya üsuluna əsaslanır.

THE CRITICAL TIME OF THE DIFFERENT WALLED VISCO-ELASTIC RING

E.T.KIYASBEYLI

SUMMARY

The work investigates loss of stability of the different walled linear visco-elastic ring, the influence of equally distributed external pressure of certain intensity in regular intervals. The decision is based on the variational method of the mixed type in combination to Reley-Rits method.